

Sur un principe du maximum dans la théorie du potentiel

Par Nobuyuki NINOMIYA

(Reçu le 4 août, 1961)

Soient $K(x, y)$ et $N(x, y)$ des fonctions positives et continues en x et y dans l'espace euclidien ou topologique localement compact qui pourront être $+\infty$ en $x=y$, et soit $K(x, y)$ symétrique [$K(x, y)=K(y, x)$]. Considérons les potentiels d'une mesure μ pris par rapport aux noyaux K et N

$$U^\mu(x) = \int K(x, y) d\mu(y)$$

et

$$V^\mu(x) = \int N(x, y) d\mu(y).$$

Dans le travail antérieur ([3]), on a étudié le balayage généralisé. Un noyau K est dit satisfaire au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N lorsque, étant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F , il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

- (1) $U^\lambda(x) = N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K -diamètre transfini nul,
- (2) $U^\lambda(x) \leq N(x, p)$ dans tout l'espace.

Alors, on a démontré ([3], § 1) que, si $N(x, y)$ est un noyau fini et continu en x et y et si un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N , à tout compact F et à toute mesure positive μ à support compact on peut associer une mesure positive μ' portée par F telle que

- (1) $U^{\mu'}(x) = V^\mu(x)$ sur F sauf un ensemble de K -diamètre transfini nul,
- (2) $U^{\mu'}(x) \leq V^\mu(x)$ dans tout l'espace,

et que, si $N(x, y)$ est un noyau qui peut être $+\infty$ en $x=y$ mais satisfait au principe de continuité, et si un noyau K satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N , à tout compact F et à toute mesure positive μ à support compact on peut associer une mesure positive μ' portée par F telle que

- (1) $U^{\mu'}(x) = V^\mu(x)$ sur F sauf un ensemble de $(K+N)$ -diamètre transfini nul,
- (2) $U^{\mu'}(x) \leq V^\mu(x)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de $(K+N)$ -diamètre transfini nul.

Un noyau K est dit satisfaire au principe du maximum par rapport au noyau N lorsque, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F , l'inégalité

$$U^\lambda(x) \leq N(x, p)$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace. Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau N , il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe du maximum par rapport au noyau N ([3], § 1). Dans ce travail, on va donner un énoncé équivalent à ce principe du maximum et en donner une extension du principe du maximum de H. Cartan ([1]).

THÉORÈME 1. *Pour qu'un noyau K satisfasse au principe du maximum par rapport au noyau N , il faut et il suffit qu'on ait la propriété :*

Pour une mesure positive λ à support compact F et

[P] un point p n'appartenant pas à F , l'inégalité

$$U^\lambda(x) \leq K(x, p)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^\lambda(x) \leq \tilde{N}(x, p)$$

dans tout l'espace, où \tilde{V}^λ est le potentiel de λ pris par rapport au noyau $\tilde{N}(x, y) = N(y, x)$.

Démonstration. Supposons qu'un noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N . Et supposons que, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F , on a l'inégalité

$$U^\lambda(x) \leq K(x, p)$$

sur F . En désignant par ε une mesure balayée de la mesure ponctuelle placée en un point t sur F , on a

- (1) $U^\varepsilon(x) = N(x, t)$ sur F sauf un ensemble de K -diamètre transfini nul,
- (2) $U^\varepsilon(x) \leq N(x, t)$ dans tout l'espace.

En effet, si le point t n'appartient pas à F , cela est la définition. Si le point t appartient à F , cela est dû au travail antérieur ([3], voir Théorème 2). Comme λ est d'énergie finie prise par rapport au noyau K , elle ne charge aucune masse positive sur des ensemble de K -diamètre transfini nul. Par suite, on a

$$\begin{aligned} \tilde{V}^\lambda(t) &= \int N(x, t) d\lambda(x) = \int U^\varepsilon(x) d\lambda(x) \\ &= \int U^\lambda(x) d\varepsilon(x) \leq \int K(x, p) d\varepsilon(x) \\ &= \int K(p, x) d\varepsilon(x) \leq N(p, t) = \tilde{N}(t, p). \end{aligned}$$

Donc, on a la propriété [P]. Inversement, supposons qu'on a la propriété [P]. Et supposons que, pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F , on a

$$U^\lambda(x) \leq N(x, p)$$

sur F . Pour tout point t n'appartenant pas à F , soit μ_0 une mesure qui rend

minimum

$$G(\mu) = \frac{\int \int K(x, y) d\mu(y) d\mu(x)}{[\int K(x, t) d\mu(x)]^2}$$

parmi toute mesure positive $\mu (\neq 0)$ portée par F . En posant

$$a = \iint K(x, y) d\mu_0(y) d\mu_0(x), \quad c = \int K(x, t) d\mu_0(x)$$

et

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \mu_0,$$

on a ([2], § 1)

- (1) $U^\varepsilon(x) \geq K(x, t)$ sur F sauf un ensemble de K -diamètre transfini nul,
- (2) $U^\varepsilon(x) \leq K(x, t)$ sur le support de ε .

Alors, on a d'après la propriété $[P]$

$$\tilde{V}^\varepsilon(x) \leq \tilde{N}(x, t)$$

dans tout l'espace. Par suite, on a

$$\begin{aligned} U^\lambda(t) &= \int K(t, x) d\lambda(x) = \int K(x, t) d\lambda(x) \\ &\leq \int U^\varepsilon(x) d\lambda(x) = \int U^\lambda(x) d\varepsilon(x) \\ &\leq \int N(x, t) d\varepsilon(x) = \tilde{V}^\varepsilon(t) \leq \tilde{N}(t, t) = N(t, t). \end{aligned}$$

Donc, le noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N .

REMARQUE. Le théorème généralise des résultats du travail ([2], § 4).

THÉORÈME 2. Si un noyau K satisfait au principe du maximum par rapport au noyau N , pour une mesure positive μ à support compact F d'énergie finie prise par rapport au noyau K et une mesure positive ν , l'inégalité

$$U^\mu(x) \leq U^\nu(x)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^\mu(x) \leq \tilde{V}^\nu(x)$$

dans tout l'espace.

Démonstration. Désignons par ε une mesure balayée de la mesure ponctuelle placée en un point t sur F . Alors, on a

- (1) $U^\varepsilon(x) = N(x, t)$ sur F sauf un ensemble de K -diamètre transfini nul,
- (2) $U^\varepsilon(x) \leq N(x, t)$ dans tout l'espace.

Comme μ est d'énergie finie prise par rapport au noyau K , elle ne charge aucune masse positive sur des ensemble de K -diamètre transfini nul. Par suite, on a

$$\begin{aligned} \tilde{V}^\mu(t) &= \int N(x, t) d\mu(x) = \int U^\varepsilon(x) d\mu(x) \\ &= \int U^\mu(x) d\varepsilon(x) \leq \int U^\nu(x) d\varepsilon(x) \\ &= \int U^\varepsilon(x) d\nu(x) \leq \int N(x, t) d\nu(x) = \tilde{V}^\nu(t). \end{aligned}$$

Dans l'espace euclidien à dimension $m (\geq 3)$, considérons le potentiel d'une mesure μ pris par rapport au noyau d'ordre α

$$U_{\alpha}^{\mu}(x) = \int |x-y|^{-\alpha} d\mu(y), \quad 0 < \alpha < m.$$

Comme on a déjà connu ([3], §1), le noyau d'ordre α ($m-2 \leq \alpha < m$) satisfait au principe du balayage ordinaire par rapport au noyau d'ordre β ($0 < \beta \leq m-2$). Naturellement, on a

COROLLAIRE. *Dans l'espace euclidien à dimension $m (\geq 3)$, soient α un nombre tel que $m-2 \leq \alpha < m$, μ une mesure positive à support compact d'énergie finie d'ordre α et ν une mesure positive quelconque. Si on a l'inégalité*

$$U_{\alpha}^{\mu}(x) \leq U_{\alpha}^{\nu}(x)$$

sur le support de μ , on a l'inégalité

$$U_{\beta}^{\mu}(x) \leq U_{\beta}^{\nu}(x)$$

dans tout l'espace pour tout nombre positif β ($\leq m-2$).

Soulignons que, si on y pose $\alpha = \beta = m-2$, cela revient au principe du maximum bien connu de H. Cartan.

REMARQUE. Un noyau E est dit satisfaire au principe du balayage inverse par rapport au noyau N lorsque, étant donnés un compact F et un point p n'appartenant pas à F , il existe au moins une mesure positive λ portée par F telle que

- (1) $U^{\lambda}(x) = N(x, p)$ sur F sauf un ensemble de K -diamètre transfini nul,
- (2) $U^{\lambda}(x) \geq N(x, p)$ dans tout l'espace sauf un ensemble de K -diamètre transfini nul.

Lorsqu'un noyau K satisfait au principe de continuité, pour qu'il satisfasse au principe du balayage inverse par rapport au noyau N , il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe du minimum par rapport au noyau N : pour une mesure positive λ à support compact F et un point p n'appartenant pas à F , l'inégalité

$$U^{\lambda}(x) \geq N(x, p)$$

sur F entraîne la même inégalité dans tout l'espace ([3], §2). Alors, d'après le raisonnement analogue, on aura

THÉORÈME 1'. *Soit K un noyau satisfaisant au principe de continuité. Pour qu'il satisfasse au principe du minimum par rapport au noyau N , il faut et il suffit qu'on ait la propriété:*

Pour une mesure positive λ à support compact F d'énergie [P'] finie prise par rapport au noyau K et un point p n'appartenant pas à F ,

l'inégalité

$$U^\lambda(x) \geq K(x, p)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^\lambda(x) \geq \tilde{V}(x, p)$$

dans tout l'espace.

THÉORÈME 2'. Soit K un noyau satisfaisant au principe de continuité. S'il satisfait au principe du minimum par rapport au noyau N , pour une mesure positive μ à support compact F d'énergie finie prise par rapport au noyau K et une mesure positive ν , l'inégalité

$$U^\mu(x) \geq U^\nu(x)$$

sur F entraîne l'inégalité

$$\tilde{V}^\mu(x) \geq \tilde{V}^\nu(x)$$

dans tout l'espace.

Bibliographie

- [1] H. Cartan : Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels, Bull. Soc. Math. France, **73**, 1945, pp. 74-106.
- [2] N. Ninomiya : Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, Jour. Inst. Polytech., Osaka City Univ., **8**, n° 2, 1957, pp. 147-179.
- [3] N. Ninomiya : Sur le problème du balayage généralisé, ce journal.